# Allocation de bande passante dans les grands réseaux stochastiques

**Mathieu Feuillet**

Inria Paris-Rocquencourt[1]

07/02/2013

[1] Jusqu'au 30/06/2012

# De quoi parle-t-on ?

Est-ce que l'absence de contrôle de congestion entrainerait la chute d'Internet ?

Est-ce que le wifi exploite la bande passante efficacement ?

Quelle est l'espérance de vie d'un fichier dans un grand système distribué ?

# Quel est le lien ?

Les outils mathématiques !

Classique : Modélisation probabiliste (Markov).

Moins courant : Méthodes de renormalisation.

Originalité de la thèse : Stochastic averaging.

# Des mathématiques et des probabilités ?

## Mathématiques :

Les simulations et les expérimentations ne permettent que d'appréhender un nombre fini de cas.

L'analyse mathématique permet de prouver certaines propriétés. Elle est complémentaire des simulations et expérimentations.

## Probabilités :

Le trafic dans les réseaux est intrinsèquement aléatoire.

- Comportement des utilisateurs.
- Erreurs aléatoires.
- Algorithmes stochastiques.

# Modélisation


Objectifs :

- Compréhension
- Conception d'algorithmes
- Dimensionnement

Outils :

- Processus de Markov
- Files d'attente
- Méthode de renormalisation

# Modèles stochastiques

État: $(X(t))$ un processus de Markov dans $\mathbb{N}^d$:

Exemples :

- Nombre de flots actifs dans l'Internet,
- Nombre de messages à transmettre,
- Nombre de fichiers.

Hypothèses de Markov :

- Arrivées Poisson
- Tailles/durées selon des lois exponentielles

Questions typiques :

- Est-ce stable ou instable ?
- Lorsque c'est stable, quel est l'état d'équilibre ?
- Quelles sont les propriétés transitoires ?

# Méthodes de renormalisation

Principe: Avec $N$ un paramètre de renormalisation,
analyser l'évolution des trajectoires du processus

$$\left(\frac{X^N(\alpha_N(t))}{\beta_N}\right)$$

quand $N \to \infty$, pour des fonctions $(\alpha_N(t))$ et $(\beta_N)$ adaptées.

But :
Donner une description au premier ordre de $(X^N(t))$:

$$X^N(\alpha_N(t)) \approx \beta_N.x(t)$$

où, $(x(t))$ est un système stochastique plus simple ou bien un système dynamique déterministe.

# Exemple classique : la limite fluide

$$\left(\bar{X}(t)\right) = \left(\frac{X(Nt)}{N}\right), \quad \text{avec } N = \|X(0)\|.$$

Paramètre de renormalisation : état initial

Échelle de temps : $t \mapsto Nt$

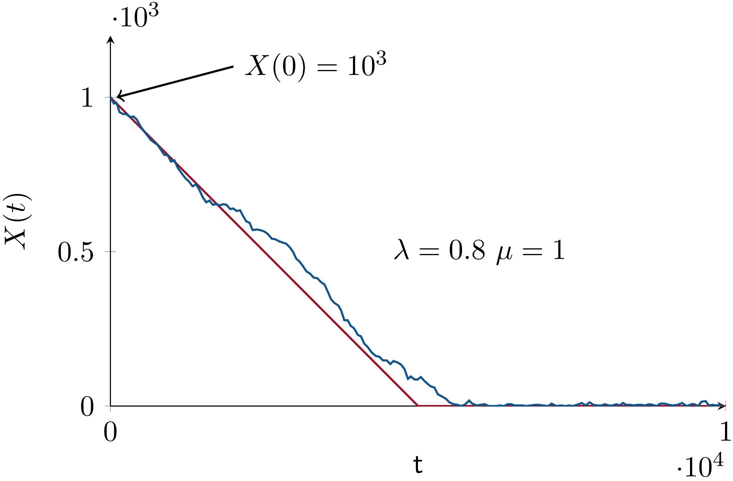
La limite fluide atteint 0

$\Downarrow$

Le processus est stable

# Exemple: la limite fluide d'une file d'attente

$$\left(\bar{X}(t)\right) = \left(\frac{X(Nt)}{N}\right), \quad \text{avec } N = X(0).$$



# Stochastic averaging : principes

Deux suites de processus $(X^N(t))$ et $(Y^N(t))$ avec

| | |
|---|---|
| $(X^N(t))$ | Processus lent |
| $(Y^N(t))$ | Processus rapide |

Lorsque $N \to \infty$, il y a séparation des échelles de temps :

Processus rapide :

- "Voit" $X^N(t) \approx x$ constant.
- Converge vers un équilibre $E_x$ qui dépend de $x$.

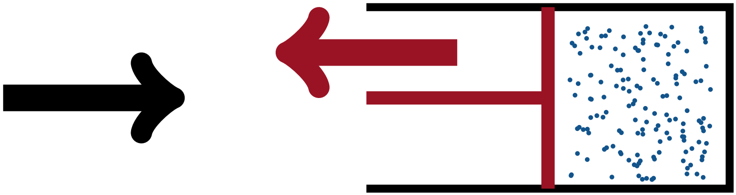
Processus lent :

- "Voit" $(Y^N(t))$ en permanence à l'équilibre
- Sa dynamique dépend de $E_{X^N(t)}$

Méthode de renormalisation non classique !

# Stochastic averaging : Exemple

On considère un piston de gaz.



Processus rapide :

$Y(t)$ : mouvement des molécules de gaz (bruit thermique)

Processus lent :

$X(t)$ : position du piston sur lequel on applique une force constante.

Equilibre local du processus rapide :

La pression $P_{Y(t)}$ qui dépend du volume... et donc de la position du piston.

# Contributions de la thèse

Contrôle de congestion dans Internet :

- Stochastic averaging
- Renormalisation sur les débits d'accès

Flow-Aware CSMA:

- Sous-optimalité de CSMA (mono/multi-canal)
- Optimalité de Flow-Aware CSMA (mono/multi)
- Stochastic averaging

Un système de fichiers avec pannes

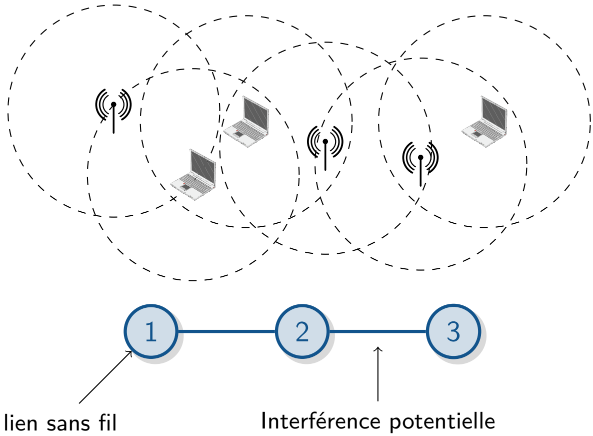
- Trois échelles de temps
- Stochastic averaging

Propriétés transitoires des modèles d'Engset et d'Ehrenfest:

- Martingales positives
- Asymptotiques de temps d'atteinte

# Modèle

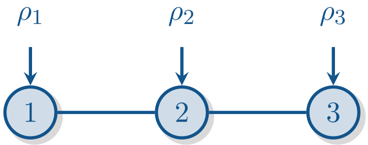
Le réseau est représenté par un graphe d'interférence.




Pour chaque nœud $i$:

- $X_i(t) \in \mathbb{N}$: nombre de flots au temps $t$.
- $Y_i(t) = 1$ si le nœud i est actif au temps $t$ et 0 sinon.

# Graphe d'interférence




Motifs d'émission : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$.

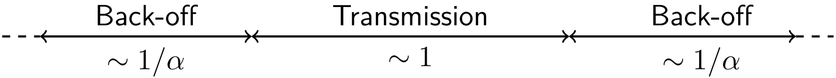
L'algorithme détermine l'enchaînement des motifs.

Taux de service : fraction du temps où le lien est actif.

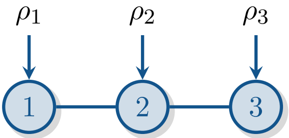
Région optimale de stabilité : Enveloppe convexe des motifs d'émission.
Dans cet exemple: $\{\rho_1 + \rho_2 \leq 1,\ \rho_2 + \rho_3 \leq 1\}$.

Région de stabilité de CSMA ?

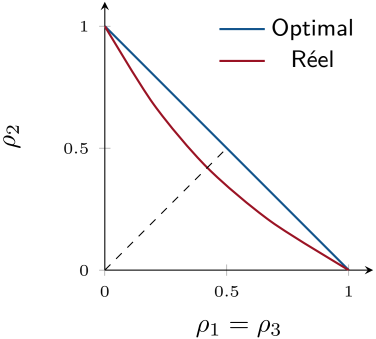
# CSMA standard




Cet algorithme n'est pas optimal !




$$\rho_1 + \rho_2 \leq 1$$
$$\rho_2 + \rho_3 \leq 1$$




Outils pour la preuve : Limites fluides.

# Proposition : Flow-Aware CSMA

Un back-off exponentiel pour chaque flot, i.e. chaque document transféré.

| Back-off | Transmission | Back-off |
|---|---|---|
| $\sim 1/(\alpha N \mathbf{x_1})$ | $\sim 1/N$ | $\sim 1/(\alpha N \mathbf{x_1})$ |

Pour chaque nœud $i$,

- $X_i^N(t) \in \mathbb{N}$: nombre de flots au temps $t$,
- $Y_i^N(t) = 1$ si le nœud i est actif au temps $t$ et 0 sinon.

Le processus $(X^N(t), Y^N(t))$ est difficile à analyser.

Idée: Séparer les dynamiques d'accès au canal et des arrivées/départs de flots.
Lorsque $N \to \infty$, $(Y^N(t))$: réseau à perte classique (modèle *hard-core* de la physique statistique).

C'est du stochastic averaging !

# Optimalité de Flow-Aware CSMA

Théorème:
L'algorithme Flow-Aware CSMA est optimal pour tout réseau.

Outils pour la preuve :

- Critère de Foster et fonction de Lyapounov (Potentiel).

# Conclusion

L'analyse mathématique est nécessaire pour l'ingéniérie des réseaux. Cela permet d'exprimer la performance des réseaux en fonction de la demande et de la capacité.

Outils mathématiques peu courants :

- Méthodes de renormalisation,
- Stochastic averaging.

Des exemples d'application :

- Contrôle de congestion dans Internet,
- CSMA pour le Wifi,
- Système de fichiers distribué avec fautes.